3°/ Soit la suite $(U_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par : $\begin{cases} U_0 = \frac{\pi}{4} \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$.

a) Montrer que $\forall n \in \mathbf{N}$, $0 \le U_n \le \frac{\pi}{4}$.

b) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet dans $]\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}[$ une seule solution α.

c) Montrer que (U_n) est convergente et trouver sa limite.

Exercice 12 :

1°/ Etablir que $\forall x \ge 0$, $x - \frac{x^2}{2} \le \ln(1+x) \le x$ (★).

2°/ Soit la suite $(U_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ définie par : $U_n = \sum_{k=1}^{n} \ln(1+\frac{k}{n^2})$.

a) Calculer U_1 et U_2.

b) Montrer que $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

c) Utiliser (★) pour montrer que (U_n) est une suite convergente.

Exercice 13 :

1°/ Etablir que $\forall x > 1$, $1 - \frac{1}{x} < \ln x < \frac{1}{2}(x - \frac{1}{x})$.

2°/ Soit $n \in \mathbf{N}^* \setminus \{1\}$. Montrer que l'équation $\ln(1+nx) = x$ admet une seule solution α_n non nulle.

3°/a) Montrer que $\forall n \in \mathbf{N}^* \setminus \{1\}$, $\ln n < \alpha_n$.

b) Montrer que $\alpha_n < 2 \ln n$ et que $\alpha_n < \ln(1+2n \ln n)$.

c) Calculer $\lim_{n\to+\infty} \frac{\alpha_n}{\ln n}$.